Le 8 juin 2020

Chers élèves,

Voici la dernière partie du cours d'analyse qui va nous permettre de regrouper toutes les connaissances acquises depuis début janvier et ainsi de tracer le graphique d'une fonction polynôme ou rationnelle.

Je vous ai résolu l'exercice 2. 1) de la page 13 et je vous joins également l'étude du graphique d'une fonction polynôme. Je vous invite à faire vous-même l'exercice 2) et tous ceux que vous voulez pour lundi prochain jour où je vous enverrai la correction d'une autre fonction.

Bonne continuation !

M.Bottin

Applications page 13 — 8/6/2020

2. Etudier une fonction (voir la marche à suivre p. 13)

1) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

1. C.E : $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ donc dom $f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. f n'est ni paire ni impaire car son domaine n'est pas symétrique par rapport à 0.

Gf ∩ ox : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+7=0$
$\Delta = 25-28 < 0$ donc pas de sol. dans $\mathbb{R}$

Il n'y a pas de point d'intersection de Gf avec ox

Gf ∩ oy : $f(0) = \dfrac{0-0+7}{0-2} = -\dfrac{7}{2} = -3{,}5$ donc $(0;-3{,}5)$

Signe de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x^2-5x+7	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\nexists$	$+$

3. A.V :
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$. On va dans le tableau des signes de f et on voit de suite que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Il y a donc une A.V $\equiv x = 2$

A.H : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \pm\infty$ donc pas d'A.H

AO :

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+7 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x-3 \\ -3x+7 & \\ 3x-6 & \\ 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x-3+\dfrac{1}{x-2}$ et $\dfrac{1}{x-2} \to 0$ si $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ A.O $\equiv y = x-3$

Signe de $\dfrac{1}{x-2}$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\dfrac{1}{x-2}$	$-$	$\nexists$	$+$

$-$: $\dfrac{AO}{Gf}$; $+$: $\dfrac{Gf}{AO}$

4. $$f'(x) = \frac{(x-2)\cdot(2x-5) - (x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 \cancel{-5x} - 4x + 10 - x^2 \cancel{+5x} - 7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\cancel{\exists}$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	AV	$\searrow$	mini	$\nearrow$	

$f(1) = \frac{1-5+7}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$ donc Max $(1;-3)$

$f(3) = \frac{9-15+7}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$ donc mini $(3;1)$

5. $$f''(x) = \frac{(x-2)^2\cdot(2x-4) - 2(x-2)\cdot 1\cdot(x^2-4x+3)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\cdot\left[(x-2)(2x-4) - 2(x^2-4x+3)\right]}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} \cancel{-4x} \cancel{-4x} + 8 \cancel{-2x^2} + \cancel{8x} - 6}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{2}{(x-2)^3}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\cancel{\exists}$	$+$	
$f(x)$		$\frown$	A.V	$\smile$	

Il n'y a pas de point d'inflexion car f non définie en 2.

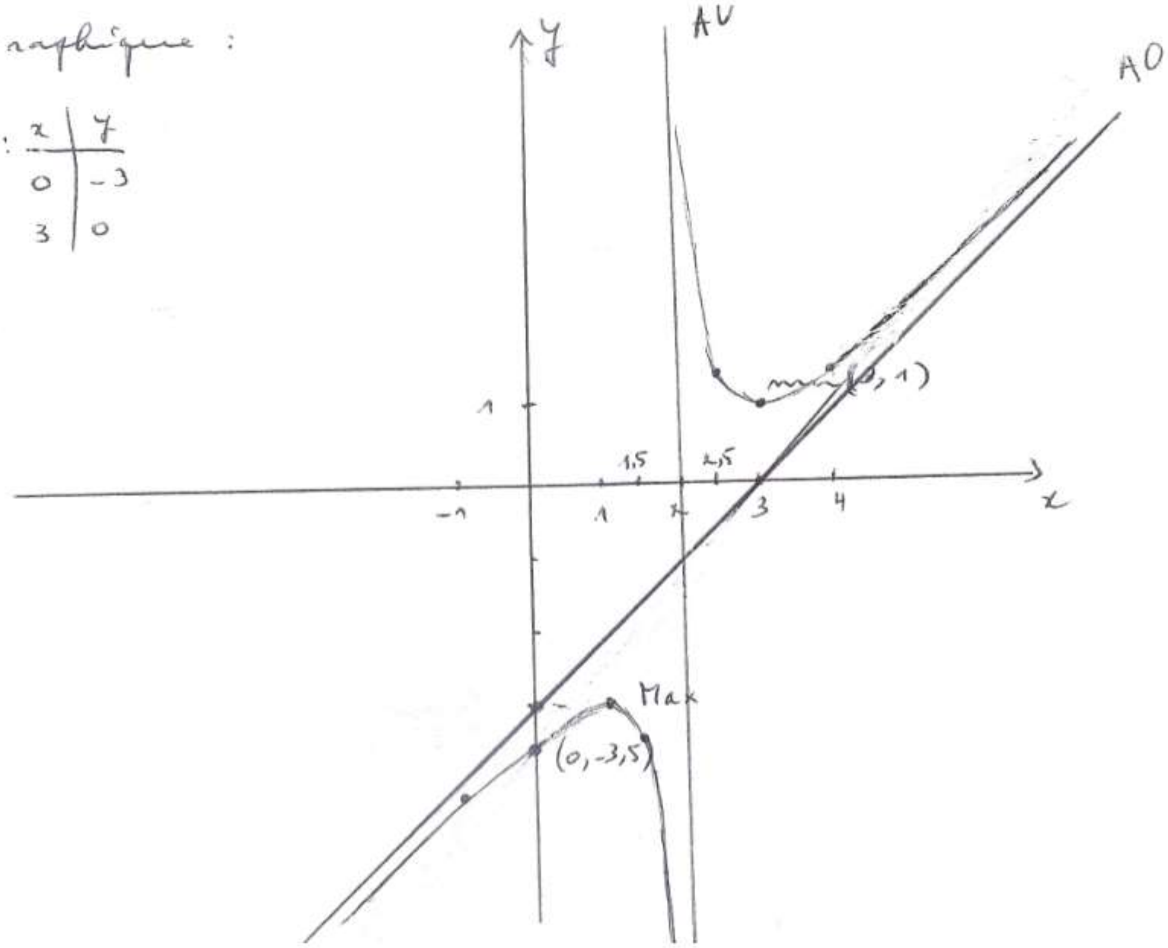
6. T.R:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\cancel{\exists}$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$\cancel{\exists}$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	AO $y=x-3$	$\nearrow$	Max -3	$\searrow$	$-\infty$ AV $+\infty$	$\searrow$	mini 1	$\nearrow$	AO $y=x-3$

7. Graphique :

AO : $y = x - 3$

x	y
0	-3
3	0



Pts supplémentaire :

x	-1	1,5	2,5	4
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	-3,5	1,5	1,5

$f(x) = x^4 - 2x^3$

1. $\text{dom } f = \mathbb{R}$

2. $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 = x^4 + 2x^3 \neq f(x)$ et $\neq -f(x)$

   donc f ni paire ni impaire

   <u>$G_f \cap 0x$:</u> $x^3(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ donc $(0,0)$ et $(2,0)$

   $(0,0)$: $G_f \cap 0y$

   <u>Signe de f :</u>

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3. <u>A.V</u> : il n'y en a pas car $\text{dom } f = \mathbb{R}$ (voir cl. sur asympt.)

   <u>AH</u> : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ donc pas d'AH

   <u>AO</u> : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ donc pas d'A.O.

4. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

   $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16}$ donc min $\left(\frac{3}{2} ; \frac{27}{16}\right)$

5. $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x) : 12x^2 - 12x$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	PI_1	$\cap$	PI_2	$\cup$

   $f(0) = 0 \Rightarrow PI_1(0,0)$ et $f(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow PI_2(1,-1)$

6. <u>T.R :</u>

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f		$\searrow$	PI_1 0	$\searrow$	PI_2 -1	$\searrow$	min $\frac{27}{16}$	$\nearrow$	

7.